线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性映射

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

线性变换基本性质

性质 (线性映射的基本性质)

设 $\mathscr{A}$ 为从 $\mathbb{F}$-线性空间 V 到 $\mathbb{F}$-线性空间 W 的线性映射. 则

1. $\mathscr{A}(0) = 0$;
2. $\mathscr{A}(-\alpha) = -\mathscr{A}(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$;
3. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基. 若 $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$, 则
$$\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_1\mathscr{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathscr{A}(\alpha_n).$$
即, 线性映射 $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}(\alpha_1), \cdots, \mathscr{A}(\alpha_n)$ 这 n 个向量唯一确定.
4. 若 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性相关, 则 $\mathscr{A}\beta_1, \cdots, \mathscr{A}\beta_m$ 也线性相关.
5. 若 $\mathscr{A}\beta_1, \cdots, \mathscr{A}\beta_m$ 线性无关, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 也线性无关.

性质 (同构基本性质)

- 同构映射的逆映射也是同构映射.
- 同构为等价关系.
- (同一域上的) 有限维线性空间同构当且仅当它们维数相同.

设 $\mathscr{A}$ 为从 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 到 m 维 $\mathbb{F}$-向量空间的一个线性变换. 分别取定 V 和 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$. 对任意 $j=1,2,\cdots,n$, 设 $\mathscr{A}(\alpha_j)\in W$ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 下的坐标为 $(a_{1j},\cdots,a_{mj})^T$, 即

$$\mathscr{A}(\alpha_j)=a_{1j}\beta_1+\cdots+a_{mj}\beta_m.$$

则这一式子可改写为

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):=\Big(\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\Big)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A,$$

其中 $A:=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$. 称 A 为线性映射 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 下的矩阵.

例

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 定义从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性变换

$$\mathscr{A}(X)=AX.$$

则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 A.

证: 记 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的自然基, $e_1',\cdots,e_m'$ 为 $\mathbb{F}^m$ 的自然基. 则 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n):=(\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n)=(Ae_1,\cdots,Ae_n)=A(e_1,\cdots,e_n)=AI_n=A=I_mA=(e_1',\cdots,e_m')A.$

线性映射的矩阵 *

例 (从矩阵出发构造线性映射)

分别取定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 和 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$. 对于给定矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 如下给出一个从 V 到 W 的映射 $\mathscr{B}$. 对任意的 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n\in V$, 定义[a]

$$\mathscr{B}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\alpha_j\right):=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\lambda_j\right)\beta_i.$$

则 $\mathscr{B}$ 为从 V 到 W 的一个线性映射, 且其在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 下的矩阵正好为 B.

[a] 这一定义也可改写为 $\mathscr{B}\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\right)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$

从而, 我们得到如下一一对应:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{从 } V \text{ 到 } W \text{ 的}\\ \text{全体线性映射}\end{array}\right\}\xleftrightarrow[\substack{1:1\\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A}]{\substack{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n\\ \text{基}\beta_1,\cdots,\beta_m}}\mathbb{F}^{m\times n}$$

定理

设 A 为线性映射 $\mathscr{A}: V \to W$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵. 若 X 为向量 $v \in V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标, 以及 Y 为 $\mathscr{A}(v)$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的坐标, 则

$$Y = AX.$$

换言之, 线性映射的作用可以通过对坐标左乘矩阵 A 实现. 即, 下图交换

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V \arrow[rr, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] \arrow[d, "\mathscr{A}", "v\mapsto\mathscr{A}(v)"'] & \arrow[d, phantom, "\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A"] & \mathbb{F}^n \arrow[d, "A"', "X\mapsto AX"] \\
W \arrow[rr, "\text{基}\beta_1,\cdots,\beta_n", "1:1"'] & & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

证明思路: $\mathscr{A}(v) = \mathscr{A}((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X) = \mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \cdot X = (\beta_1, \cdots, \beta_m)A \cdot X = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \cdot AX.$

现在，我们考虑 W 等于 V 的情形.

设 $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换. 固定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 则存在矩阵 $A := (a_{ij})_{n\times n}$ 使得

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A.$$

称矩阵 A 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 下的矩阵.

例

设 $V = \mathbb{F}^{2\times 2}$. 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$. 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}(M) := AM.$$

求 $\mathscr{A}$ 在 $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ 下的矩阵.

$$\left\{\begin{matrix} \text{从 } V \text{ 到 } V \text{ 的} \\ \text{全体线性变换} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow[\substack{1:1 \\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}]{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \mathbb{F}^{n\times n}$$

线性变换的坐标表示

向量 x 和 $\mathscr{A}x$ 在同一组基下坐标之间的关系.

定理

设 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A. 若向量 $x \in V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标 $X \in \mathbb{F}^n$, 向量 $\mathscr{A}x$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $Y \in \mathbb{F}^n$, 则

$$Y = AX.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] \arrow[d, "\mathscr{A}"'] & \mathbb{F}^n \arrow[d, "A"] \\
V \arrow[r, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] & \mathbb{F}^n
\end{tikzcd}$$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

例

记 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$ $\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. 设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{F}^3$ 上线性变换满足 $\mathscr{A}(\alpha_i) = \beta_i\ (i = 1, 2, 3)$. 求

1. $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;
2. $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

解答:

1. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$;
2. $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$.

线性映射的运算 *

设 U, V 和 W 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间.

1. (加法) 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为从 V 到 W 的两线性映射. 对任意 $v \in V$, 定义
$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(v) := \mathscr{A}(v)+\mathscr{B}(v);$$
2. (数乘) 设 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 W 的线性映射. 对于任意 $v \in V$, 定义
$$(\lambda\mathscr{A})(v) := \lambda\mathscr{A}(v);$$
3. (合成) 设 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 W 的线性映射,$\mathscr{B}$ 为从 U 到 V 的线性映射. 对于任意 $v \in V$, 定义
$$(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})(u) := \mathscr{A}\left(\mathscr{B}(v)\right).$$

性质

1. 以上三者均为线性映射的运算. 即, $\mathscr{A}+\mathscr{B}$, $\lambda\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 仍为线性变换.
2. 若各自取定 U, V 和 W 的一组基, 设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 在这些基下的矩阵分别为 A,B, 则 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$, $\lambda\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 在这些基下的矩阵分别为 $A+B$, λA 和 AB.
3. 从 V 到 W 上的全体线性映射组成的集合, 记为 $\mathrm{Hom}(V, W)$, 在线性映射的加法和数乘下构成 $\mathbb{F}$-线性空间.

我们考虑 $W=\mathbb{F}$ 的情形.
称从 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射为 V 上的线性函数. 记

$$V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F}) = \{f\colon V \to \mathbb{F} \mid f\text{为线性函数}\}.$$

为 V 上全体线性函数组成的集合. 由线性映射的加法和数乘, 我们有线性函数的加法和数乘

$$(f+g)(v) := f(v)+g(v)$$
$$(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$$

性质

在线性函数的加法和数乘下, V^* 构成 $\mathbb{F}$-线性空间. 称之为 V 的对偶空间.

对偶空间基本性质 *

性质 (对偶空间的维数与基)

- 对偶空间 V^* 的维数与 V 的维数相同.
- 若 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的一组基, 则 V^* 存在唯一的一组基 $f_1, \cdots, f_n$ 满足

$$f_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} i = j; \\ 0, & \text{若} i \neq j \end{cases}.$$

称 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基.

我们有如下自然的取值映射 (evaluation map):

$$ev \colon V^* \times V \to \mathbb{F}; \quad (f, v) \mapsto f(v).$$

性质

$$V \cong V^{**} \quad v \mapsto ev(-, v)$$

注: 若我们不要求 V 为有限维的, 则映射 $V \to V^{**}$ 仅为单射.

向量的逆变性与对偶向量的协变性 *

性质 (向量的逆变性与对偶向量的协变性)

设 $e_1, \cdots, e_n$ 以及 $e'_1, \cdots, e'_n$ 为 V 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间的两组基. 设过渡矩阵为 A, 即

$$(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)A.$$

记这两组基的对偶基分别为 $f_1, \cdots, f_n$ 和 $f'_1, \cdots, f'_n$.

1. (向量的逆变性) 设 $v \in V$ 在两组基下坐标为 X 和 X'. 即,
$$v = (e_1, \cdots, e_n)X = (e'_1, \cdots, e'_n)X'.$$
则
$$X' = A^{-1}X \quad 或 \quad (x'_1, \cdots, x'_n) = (x_1, \cdots, x_n)(A^{-1})^T.$$
2. (对偶向量协变性) 设对偶向量 f 在两组对偶基下坐标为 Y 和 Y'. 即,
$$f = (f_1, \cdots, f_n)Y = (f'_1, \cdots, f'_n)Y'.$$
则
$$Y' = A^TY \quad 或 \quad (y'_1, \cdots, y'_n) = (y_1, \cdots, y_n)A.$$

证明思路:

$$(f'_1, \cdots, f'_n) = (f_1, \cdots, f_n)(A^{-1})^T.$$

多项式在线性变换处取值

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 上的线性变换. 记 $\mathscr{A}^0 := \mathrm{id}(:= \varepsilon)$. 对任意正整数 k, 定义

$$\mathscr{A}^k := \underbrace{\mathscr{A} \circ \mathscr{A} \circ \cdots \circ \mathscr{A}}_{k\text{次}}.$$

对于 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$, 定义

$$f(\mathscr{A}) := a_0 \cdot \varepsilon + a_1\mathscr{A} + \cdots a_n\mathscr{A}^n.$$

例

若 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A. 则 $f(\mathscr{A})$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 $f(A)$.

更一般地, 记 $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. 定义

$$\exp(\mathscr{A}) = \varepsilon + \frac{\mathscr{A}}{1!} + \frac{\mathscr{A}^2}{2!} + \frac{\mathscr{A}^3}{3!} + \cdots.$$

性质

若 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 则 $\exp(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \exp(\mathscr{A})\exp(\mathscr{B})$.

线性映射在不同基下的矩阵与相抵关系 *

设 $\mathscr{A}$ 为从 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 到 m 维 $\mathbb{F}$-向量空间的一个线性映射. 设线性映射 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵为 A. 即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_m)A.$$

设线性映射 $\mathscr{A}$ 在另外两组基 $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ 和 $\beta_1', \cdots, \beta_m'$ 下的矩阵为 B. 即

$$\mathscr{A}(\alpha_1', \cdots, \alpha_n') = (\beta_1', \cdots, \beta_m')B.$$

定理

记从线性空间 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ 的过渡矩阵为 Q, 以及从线性空间 W 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 到基 $\beta_1', \cdots, \beta_m'$ 的过渡矩阵为 P. 则

$$B = P^{-1}AQ.$$

$\mathscr{A}(\alpha_1', \cdots, \alpha_n') = \mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q = (\beta_1, \cdots, \beta_m)AQ = (\beta_1', \cdots, \beta_m')P^{-1}AQ.$

推论

线性映射在不同基下的矩阵之间相抵.

注: 反之亦然. 即, 相抵的矩阵是同一个线性映射在不同基下的矩阵.

定理

设线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵为 A 和 B. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 T. 则

$$B = T^{-1}AT.$$

例

设线性变换 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ 满足

$$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}4 & 9 & -5\\-1 & -23 & 15\\-7 & -16 & 13\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

解: $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 1 & 0\\5 & 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. $C = T^{-1}\begin{pmatrix}4 & 9 & -5\\-1 & -23 & 15\\-7 & -16 & 13\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}-10 & 2 & 3\\10 & 4 & 10\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

定义 (相似)

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 为两个 n 阶方阵. 若存在可逆阵 $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $B = T^{-1}AT$, 则称 A 与 B 相似. 记为 $A \sim B$.

性质

相似为等价关系.

根据相似关系, 将全体 n 阶矩阵分为若干类. 相似类, 代表元.

定理

一个线性变换在不同基下矩阵相似. 反之任意属于该相似类的矩阵, 均为该线性变换在某组基下的矩阵.

证明思路: 设 $\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A$. 若 $B = T^{-1}AT$, 记 $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T$, 则 $\mathscr{A}(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)B$.

相似不变量.e.g. 行列式, 秩.

类比于相抵关系, 对相似关系我们有如下基本问题:

1. 两个矩阵相似充要条件
2. 相似等价类中的最简代表元